На правах рукописи

004603988

Высоцкий Семен Андреевич

Стабилизация турбулентной спирально-волновой динамики возбудимых сред

Специальность 01.04.02 — теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва — 2010 г.

Работа выполнена на физическом факультете
Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Лоскутов Александр Юрьевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник
Волков Евгений Израилевич

доктор физико-математических наук, профессор
Розов Николай Христович

Ведущая организация:
Институт космических исследований Российской академии наук

Защита состоится «17» июня 2010 года в 15 ч. 30 м. на заседании Диссертационного Совета Д 501.002.10 в Московском государственном университете по адресу: 119991, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, ауд. СФА

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан «13» мая 2010 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета Д 501.002.10
в Московском государственном университете
доктор физико-математических наук, профессор Ю.В. Грац ....

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Распределенные среды представляют собой достаточно широкий класс, включающий самые разные математические, физические, химические биологические и другие системы. Любой объект, если его компонента распределена в пространстве или времени по некоторому закону, является распределенным. К таким объектам относятся, например, жидкость или газ, популяция какого-либо вида, человеческий мозг или проводящая ткань сердца. Не удивительно, что уже очень давно данный класс систем привлекает исследователей из самых разных областей.

Наиболее сложная проблема теории распределенных сред — управление их динамикой и, в частности, стабилизация (подавление) сложных режимов поведения (квазипериодических или хаоса). Эта проблема возникла достаточно давно и связана она с тем, что такие сложные режимы, как правило, являются крайне нежелательными. В особенности это касается реальных физических, экологических, химических или биологических систем.

Под стабилизацией неустойчивого или хаотического поведения динамических систем обычно понимается искусственное создание и поддержание в этих системах устойчивых (как правило, периодических) колебаний посредством внешнего воздействия. Эта задача, не смотря на простоту формулировки, оказывается весьма сложной научной проблемой, особенно в приложении к распределенным средам.

Актуальность такой задачи вполне очевидна. Рассмотрим несколько реальных примеров. В приложении к сердечной ткани выведение системы на требуемый режим дает возможность влиять на сердечный ритм. Дело в том, что в настоящее время в теории возбудимых сред доминирует гипотеза, согласно которой возникновение фатальных сердечных аритмий — фибрилляций — есть следствие рождения в сердечной ткани большого количества автоволновых источников: спиральных волн или вихревых структур (т.е. пространственно–временного хаоса). Современные методы стабилизации таких режимов с помощью одиночных электрических импульсов (в том числе от имплантируемых дефибрилляторов) являются весьма жесткими и далеко не всегда приводят к успеху. Однако исследования самого последнего времени открывают новые возможности. Оказывается, что турбулентный режим во многих возбудимых средах может быть стабилизирован достаточно *слабым периодическим* параметрическим, или силовым воздействием, приложенным к некоторой области среды. Для реакции Белоусова-Жаботинского такое воздействие позволяет создавать структуры нужного вида, получая таким образом системы, способные распознавать образы. Помимо перечисленных здесь идей, результаты настоящей работы можно использовать для кодирования информации, создания когерентных структур заданной геометрии, управления потоком частиц и других многочисленных приложений современной теоретической физики.

Цели работы.

— Построение математических моделей распределенных сред с различными граничными и начальными условиями, состоящих из возбудимых элементов.

— Исследование динамики системы в том числе со слабым почти точечным внешним воздействием.

— Анализ поведения системы в зависимости от параметров возбудимости среды, а также характеристик внешнего возбуждения.

— Стабилизация сложных режимов поведения, связанных со спирально-волновой турбулентностью.

— Изучение проблемы стабилизации турбулентной динамики силовым воздействием, применяемым ко всем точкам среды.

Научная новизна полученных в диссертации результатов

1. Исследована динамика математических моделей распределенной среды с внешним воздействием при различных граничных и начальных условиях и в широком диапазоне параметров как среды так и внешнего

воздействия.

2. На основе теории динамических систем и новых результатов теории распределенных сред показана возможность управления динамикой представленных моделей.

3. Показана принципиальная возможность выведения системы из состояния сложной (в том числе хаотической) динамики слабым почти точечным воздействием.

4. Исследована возможность одновременного воздействия на все элементы среды, указаны преимущества и недостатки такого подхода.

5. Предложен новый метод подавления спирально-волновой турбулентности с помощью движущихся ведущих центров, позволивший заметно повысить его эффективность. Получена зависимость эффективности подавления от количества ведущих центров и их характеристик.

Практическая ценность работы

1. Показана принципиально новая возможность подавления спирально-волновой турбулентности возбудимой среды внешним точечным воздействием малой амплитуды и выведения ее на периодический режим движения.

2. Разработаны практические методы, позволяющие вычислять наиболее предпочтительные для такой стабилизации частоты.

3. Найдено, что нестационарный пейсмекер, расположенный в среде, значительно повышает эффективность предложенного метода.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, общих сведений (обзора литературы), четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы из 173 наименований. Диссертация содержит 126 страниц текста, включая рисунки, оглавление и список литературы.

Публикации

По результатам данной диссертационной работы опубликовано четыре статьи в реферируемых журналах (две — в международных и две —

в российских), а так же одна статья в сборнике, посвященном исследованию распределенных сред.

Апробация работы

Основные результаты исследования были доложены на на многочисленных международных конференциях. В их числе 17-й международный симпозиум NDES в Швейцарии в июне 2009 года, международный симпозиум, посвященный сложным динамическим системам и приложениям в Индии в 2009 году. Дважды результаты докладывались на конференции PhysCon в Санкт-Петербурге в 2005 году и в Германии в 2007 году.

Основное содержание диссертации

Во введении диссертации обоснована актуальность темы исследований и сформулированы цели работы.

Первая глава посвящена общим сведениям. Здесь содержится обзор литературы, формализуется проблема внешнего воздействия на динамическую систему и подавления нерегулярных режимов поведения при помощи такого воздействия. Далее приводятся некоторые существующие на сегодняшний день точные результаты из теории нелинейных сред с диффузией. Рассмотрены как дискретные, так и непрерывные модели распределенных сред. В частности приводятся простая модель ФитцХью-Нагумо, ее модификация Панфилова-Хогевега и более сложная трехкомпонентная модель Фентона-Кармы.

Модель ФитцХью-Нагумо обычно записывается в виде двухкомпонентной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f(u) - v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = g(u,v)(ku - v). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u(x,y,t)$ — концентрация активатора, $v(x,y,t)$ — концентрация ингибитора. Легко видеть, способностью к диффузии обладает лишь активатор, он и служит прообразом потенциала действия, который используется в многочисленных приложениях.

Вид функций $f(u)$ и $g(u,v)$ обычно выбирают таким образом, чтобы полученные при интегрировании профили $u(x, y, t)$ максимально соответствовали профилям потенциала действия, полученным экспериментально. Например, в модификации Панфилова-Хогевега эти функции выбраны в кусочно-линейном виде:

$$f(u) = \begin{cases} C_1 u, & u < u_1, \\ -C_2 u + a, & u \in [u_1, u_2), \\ C_3(u-1), & u \geq u_2, \end{cases} \quad g(u,v) = \begin{cases} G_1, & u < u_2, \\ G_2, & u \geq u_2, \\ G_3, & u < u_1, \nu < \nu_1. \end{cases} \tag{2}$$

В частности, значения параметров, приближающих систему к модели сердечной ткани и найденные эмпирически, таковы:

$$\begin{array}{lll} C_1 = 20 & u_1 = 0.0026 & a = 0.06 \\ C_2 = 3 & u_2 = 0.837 & k = 3 \\ C_3 = 15 & v_1 = 1.8 & G_2 = 1.0 \end{array} \tag{3}$$

Динамика активатора определяется функцией f, динамика ингибитора — функцией g. Параметры G_1 и G_3 являются управляющими и определяют относительный и абсолютный рефрактерный период соответственно.

Для количественного анализа возбудимых сред существуют более сложные модели, такие, например, как модель Фентона-Кармы. Она записывается в виде трехкомпонентной системы:

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla(\tilde{D}\nabla u) - J_{Na}(u,v) - J_K(u) - J_{Ca}(u,w), \\ \partial_t v = \Theta(u_c - u)(1-v)/\tau_v^-(u) - \Theta(u-u_c)v/\tau_v^+, \\ \partial_t w = \Theta(u_c - u)(1-w)/\tau_w^- - \Theta(u-u_c)w/\tau_w^+. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь $u = \frac{V_m - V_0}{V_{Na} - V_0}$, $\tau_v^-(u) = \Theta(u - u_v)\tau_{v1}^- + \Theta(u_v - u)\tau_{v2}^-$, v, w — переменные состояния, $\Theta(x)$ — стандартная функция Хевисайда. J_{Na}, J_K и J_{Ca} — токи натрия, калия и кальция, соответственно. Они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{Na}(u,v) &= -\frac{v}{\tau_d}\Theta(u-u_c)(1-u)(u-u_c), \\ J_K(u) &= \frac{u}{\tau_o}\Theta(u_c - u) + \frac{1}{\tau_r}\Theta(u-u_c), \\ J_{Ca}(u,w) &= -\frac{w}{2\tau_{Ca}}(1 + \mathrm{th}[k(u - u_c^{Ca})]). \end{aligned} \tag{5}$$

Эта модель была предложена Фентоном (Fenton) и Кармой (Karma) в 1998 году. Ее цель не в том, чтобы точно копировать микроскопическую ионную сложность тех или иных процессов, а скорее в том, чтобы воспроизвести динамику потенциала действия на мезоскопическом уровне (на шкалах между внутриклеточным уровнем и целым органом, если речь идет о моделировании сердечной ткани). Модель построена так, чтобы ввести минимальный набор ионных мембранных токов, необходимых для воспроизведения экспериментально полученных кривых восстановления, и, таким образом, состоит из трех переменных.

Данные системы в диссертационной работе рассматриваются не только с точки зрения формального перечисления их характеристик и свойств, но также и с точки зрения возникающих в них решений. К таким решениям в частности относятся известные автоволновые структуры — спиральные волны.

Спиральная волна, как следует из названия, представляет собой самостоятельно вращающуюся в среде автоволновую структуру спиральной формы. Ядро спиральной волны (центральный сегмент квадрата на рис. 1) представляет собой разрыв фазы (или фазовую сингулярность). Фаза обычно определяется через значения функций $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ в точке и их среднего по всей области интегрирования в каждый момент времени u^* и v^*:

$$\phi = \arctan\left(\frac{u(x,y,t) - u^*}{v(x,y,t) - v^*}\right).$$

Рассмотрим интеграл, через который определяется так называемый «топологический заряд»:

$$n = \oint_C \nabla\phi \, dl \tag{6}$$

Если замкнутый контур C окружает точку фазовой сингулярности, то интеграл обратится в $\pm 2\pi$ (знак определяет хиральность). В противном случае он будет равен 0 . Обозначим градиент фазы через вектор $\nabla\phi = \mathbf{k}$. Понятно, что величина $\mathbf{k}$ обращается в 0 везде, где ϕ дифференцируема, и не равен 0 как раз в точках фазовых сингулярностей. Компоненты $\mathbf{k}$

можно представить в виде конечных разностей на сетке:

$$k_x[m,n] = \phi[m+1,n] - \phi[m,n],$$
$$k_y[m,n] = \phi[m,n+1] - \phi[m,n].$$

Порядок суммирования градиента фазы по ячейкам показан на рис. 1:

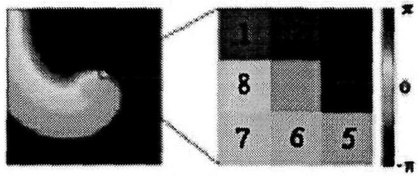

Рис. 1 *Порядок суммирования значений градиента фазы при поиске фазовых сингулярностей.*

Интеграл (6) можно выразить через так называемый оператор конволюции:

$$n = [\mathbf{k} \times \nabla] \propto \nabla_x \otimes k_x + \nabla_y \otimes k_y$$

Здесь $\otimes$ — оператор конволюции, а ∇_x и ∇_y — ядра конволюции. Конкретный вид ядер зависит от того, каким методом будет аппроксимироваться интеграл и по какому количеству ячеек будет проводиться интегрирование. В диссертационной работе мы использовали ядра следующего вида:

$$\nabla_x = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \nabla_y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix},$$

что соответствует суммированию по восьми соседним ячейкам.

Здесь необходимо отметить, что вовсе не обязательно любой фазовой сингулярности соответствует спиральная волна (обратное, однако, верно). Сингулярности могут появляться в среде также в виде небольших «обрывков» волнового фронта и исчезать.

Временна́я динамика фазовых сингулярностей впоследствии будет использована как критерий развития в среде пространственно-временного хаоса и подавления спирально-волновой турбулентности.

Главы со второй по пятую включительно содержат оригинальные результаты.

Во второй главе приводится аналитическое исследование системы (1). Рассматривается система с внешним воздействием. Обсуждаются оптимальные параметры такого воздействия и методики их подбора. В данной главе также показана принципиальная возможность выведения системы из состояния спирально-волновой турбулентности слабым почти точечным воздействием.

Рассмотрим вначале сосредоточенную систему, образованную из системы (1) без внешнего воздействия путем отбрасывания оператора Лапласа. Тогда получим следующие два простых уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -f(u) - \nu, \\ \dot{v} &= g(u,v)(3u - v). \end{aligned} \tag{7}$$

Функции $f(u)$ и $g(u,\nu)$ имеют тот же вид, что и в соотношении (2), то есть состоят из трех линейных участков. Таким образом, фазовая плоскость системы (7) делится прямыми $u = u_1$, $u = u_2$ и $v = v_1$ на три части, которые мы обозначим I, II и III. Целесообразно рассматривать исследуемую систему отдельно в каждой из указанных областей. Перепишем систему (7) в векторном виде:

$$(\dot{u}, \dot{v}) = \mathbf{F}(u, v),$$

Рассчитаем значения дивергенции потока $\mathbf{F}$ в каждой из трех областей. Несложно показать, что

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{F}_I) &= -20 - G_3 < 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{F}_{II}) &= 3 - G_1 > 0, \\ \operatorname{div}(\mathbf{F}_{III}) &= -15 - G_2 = -16 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в области III система консервативна, но, как видно из рис. 2, в целом она оказывается диссипативной, т.к. из области III фазовые траектории всегда уходят либо в область I либо в область II. Анализ на стационарные точки показывает, что в области I есть одна такая точка $(0,0)$, в области II стационарных точек нет, и в области III — еще одна точка $(5/6, 5/2)$. Собственные значения матрицы линеаризации — действительные отрицательные числа: $\lambda_{1,2}|_{(0,0)} = 1/2(-20 - G_3 \pm$

$\sqrt{(20+G_3)^2 - 92G_3})$ (где $G_3 > 0$), и $\lambda_{1,2}|_{(5/6,5/2)} \approx -14.8, -1.2$. То есть обе стационарные точки являются устойчивыми узлами.

В касательном пространстве системы имеется три независимых векторных поля скоростей $(\dot{u}, \dot{v})$ и довольно сложно предсказать, как поведет себя фазовая траектория с начальными условиями, близкими к границам между областями I,II и III. Значения управляющих параметров были фиксированы: $G_1 = 0.01$ и $G_3 = 0.1$. На представленном ниже рисунке показано векторное поле скоростей системы (7) $(\dot{u}, \dot{v})$ в фазовом пространстве (u, v), и показана одна фазовая траектория с начальным условием $(1.5, 0)$.

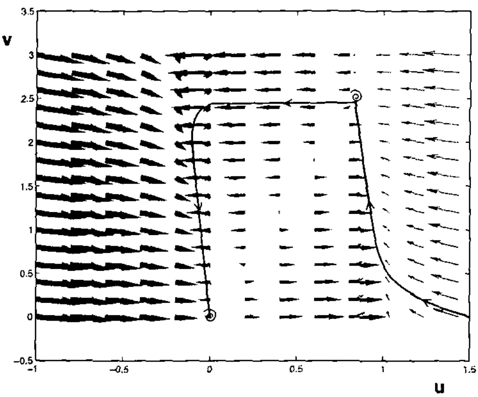

Рис. 2 *Поле скоростей системы (7) в фазовом пространстве. Жирной, полужирной и тонкой линиями обозначены части поля I, II и III, соответственно. Узлы обозначены маленькими спиралями.*

Добавим теперь к компоненте u системы (7) оператор Лапласа и перейдем, таким образом, от сосредоточенной к реакционно-диффузионной системе. Для того чтобы понять как именно появление лапласиана влияет на поведение среды, введем малый коэффициент α как:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u - f(u) - v,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(u,v)(ku - v).$$

Численное исследование этой системы при $G_1 = 0.01$ и $G_3 = 0.1$ показало, что при $\alpha \leqslant 0.01$ распространение волн в среде невозможно –

волновые фронты затухают. При $\alpha = 0.2$ наблюдается процесс дестабилизации и распада волнового фронта одиночной спиральной волны, т.е. волновой фронт претерпевает разрыв и постепенно распадается на небольшие куски. Они, в свою очередь, могут либо затухать, либо образовывать вторичные спирали, которые также постепенно разрушаются.

Вообще говоря, не вполне ясно, необходимо ли условие неустойчивости волнового фронта, чтобы можно было утверждать, что система находится в состоянии спирально-волнового хаоса. Простейшая неустойчивость появляется, когда спиральные волны начинают блуждать при переходе (названный вторичной бифуркацией Хопфа) от вращающейся с одним периодом спиральной волны к двойной периодической системе, когда спираль вращается с одним периодом, а ее кончик (фазовая сингулярность) прецессирует с другим периодом. Следующая бифуркация имеет место при переходе от квазипериодического блуждания к хаотическому, при котором траектория фазовой сингулярности сильно нерегулярна. В этом случае появляется новый режим, когда непрерывно создаются и уничтожаются множественные вращающиеся волны.

Для того чтобы понять процесс возникновения пространственно-временного хаоса в исследуемой системе (1), необходимо сначала пояснить процесс возникновения спиральных волн. Существуют разные способы искусственного создания спиралей. Например, можно непосредственно задать ее в виде архимедовой спирали $r = a/2\rho$, где a — постоянный шаг спирали. В данной работе используется способ получения спирали из плоской полуволны. Принцип, лежащий в основе данной методики, очень простой. В свободную среду помещается прямой отрезок волнового фронта. Вследствие диффузии он начинает постепенно прорастать, закручиваться и принимать спиральную форму с обоих концов. Если теперь уменьшить параметр G_1, то волновые фронты постепенно будут терять устойчивость и со временем начинают разрушаться. Этот случай показан на рис. 3.

Что касается внешнего воздействия, то параметрическое воздействие в рассматриваемом классе систем не всегда осуществимо, т.к. оно предполагает изменение управляющих параметров во всех точках среды одновременно. Поэтому мы изучали возможность точечного подавления путем подвода коротких импульсов к определенному участку среды, что — и это очень важно — легко реализовать на практике.

Рис. 3 *Образование спирали из плоской полуволны с последующим ее разрушением и переходом к хаосу,* $G_1 = 0.01333$, $G_3 = 1$.

Нами было использовано несколько вариантов: синусоидальная форма, однофазные прямоугольные импульсы, бифазные прямоугольные импульсы, постоянное «напряжение», бифазный пилообразный импульс различных конфигураций и др. Как оказалось, однофазные импульсы не приводят к подавлению. Это связано с формой потенциала действия, а точнее с фазой реполяризации, которая частично находится в отрицательной области. По этой же причине не удалось достичь подавления с помощью постоянного сигнала, подаваемого в среду.

Отдельно мы исследовали бифазный пилообразный импульс различных конфигураций: импульс, обе фазы которого имеют одинаковую амплитуду A, а также импульс, амплитуда отрицательной фазы которого была равна $A/2$. Однако подавления во втором случае добиться не удалось при всех значениях τ. Для импульса с одинаковыми амплитудами фаз подавления удалось достичь только при $\tau = 1$. Поэтому далее мы будем рассматривать только такой пилообразный импульс.

Для поиска частот эффективного подавления мы воспользовались следующей простой методикой. В сравнительно небольшом объеме с нулевыми начальными условиями и пейсмекером собственной частоты ω_{in} генерировались кольцевые волны. Поскольку среда нелинейна, то возникающие кольцевые волны будут иметь иную частоту. Обозначим ее ω_{out}. В фиксированной точке, находящейся на значительном удалении от ведущего центра, снимались значения переменной u во времени. Далее по полученному графику $u(t)$ выполнялось преобразование Фурье и находилась частота основной гармоники ω_{out}. Далее строилась зависимость $\omega_{out}(\omega_{in})$. Очевидно, что частоты — кандидаты на наиболее эффективное подавление — существуют в окрестности глобального максимума этой зависимости. Здесь мы исходим из известного принципа, что в распределенных средах «выживает» возбуждение наибольшей возможной частоты.

Все проводившиеся численные исследования были выполнены с ограничением на максимальное время наблюдения в 10000 мс. Иными словами, мы считали подавление *достаточно* успешным если оно укладывалось в этот период.

Рассмотрим среду, для которой управляющие параметры суть $G_1 = 1/30, G_3 = 1.0$. Тогда оптимальные частота и амплитуда внешнего бифазного прямоугольного импульса, соответствующие данным параметрам среды составят $\omega_{in} = 0.48$ и $A = 6$, т.к. глобальные максимумы амплитудно-частотных зависимостей отвечают именно этим значениям параметров импульса. Однако попытка подавить турбулентность при этих параметрах привела к неудаче. Спиральные волны убывают во времени очень медленно, их число остается практически постоянным в течении 7000 мс. (рис. 4б). В то же время, при $\omega_{in} = 1.2$ и $A = 6$ результат оказался куда более важным. Ведущий центр полностью вытесняет спирали за весьма короткий интервал $t \approx 1700$ мс. (рис. 4а).

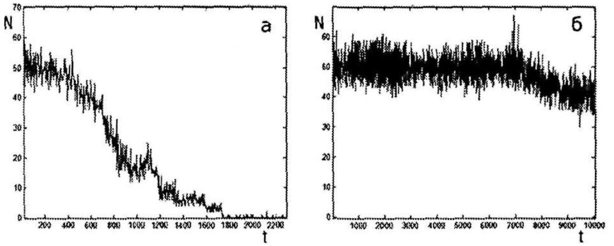

Рис. 4 *Зависимость числа фазовых сингулярностей* N *в системе от времени при:* $\omega_{in} = 1.2$ (а), *и* $\omega_{in} = 0.48$ (б) $A = 6, \tau = 0.7, G_1 = 1/30, G_3 = 1.0$.

Многочисленные скачки на этих графиках вызваны особенностью алгоритма подсчета сингулярностей. Принципиальной роли они не играют, так как нас интересует непосредственно сам момент времени, когда этот график касается оси абсцисс. Тщательное исследование позволяет сделать вывод, что к этому моменту в среде действительно не остается ни одной спиральной волны, так что система переходит в состояние покоя.

При тех же параметрах среды для пилообразного импульса с амплитудой $A = 7$ зависимость $\omega_{out}(\omega_{in})$ получилась весьма любопытной. Она представляет собой совокупность линейных участков, отвечающих различным режимам синхронизации среды и пейсмейкера ($1:1, 1:2, 1:3$ и т.д.).

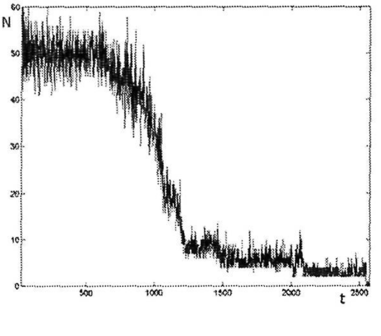

Рис. 5 *Зависимость числа фазовых сингулярностей N в системе от времени для пилообразного импульса с частотой $\omega_{in} = 1.82$ и амплитудой $A = 7$ при* $G_1 = 1/30, G_3 = 1.0$.

Самый высокий максимум частотной характеристики приходится в этом случае на значение $\omega_{in} = 1.82$. Пейсмекер с этой частотой вытеснил из среды все спиральные волны примерно за 2500 мс. (см. рис. 5) , что на 50% дольше, чем для прямоугольного импульса. Тем не менее, это весьма удачный результат.

Однако далеко не при всех параметрах среды результаты получились столь же оптимистичными. Это обстоятельство связано со значительной чувствительностью среды к начальным условиям, и об этом еще будет сказано ниже.

Рассмотрим теперь известную систему Фентона-Кармы, которая была изначально предложена как упрощенная ионная модель распространения потенциала действия в сердечной ткани. В наших исследованиях внешнее воздействие представляло собой однофазные или бифазные прямоугольные импульсы с амплитудой A и частотой ω_{in} и подавалось в область размером 2×2 узла. Точно так же как и для модели ФицХью-Нагумо, для определения отношения длительностей полуволн бифазного импульса здесь использовался параметр τ.

Мы считали, что период внешнего импульса $T < 500\ ms$, это условие было необходимо, чтобы обеспечить достаточно высокую частоту импульсов стабилизации. Также необходимо было найти значения параметров A и τ, обеспечивающих наиболее эффективное управление динамикой системы. Численно было найдено, что оптимальными значениями для параметра τ являются следующие: $\tau = 0.05 \div 0.15$ для монофазных импульсов и $\tau = 0.25 \div 0.3$ для бифазных.

Вначале исследовалась возможность подавить сложную активность монофазным воздействием. Было обнаружено, что хотя подавление наблюдается для частот $3, 13$ Гц и 7 Гц, оно сильно зависит от начальных условий. Например, монофазное воздействие при $\omega_{in} = 7$ Гц приводит к стабилизации хаотической динамики, если начинается в момент времени 500 мс, но оно неудачно, если начало подавления приходится на 600 мс. И наоборот, стимуляция частоты $3, 13$ Гц, приложенная в момент 600 мс, привела к подавлению спирально-волновой турбулентности.

Затем исследовались бифазные импульсы внешнего воздействия. В отличие от монофазной стимуляции, бифазное воздействие приводит к стабилизации сложной динамики стимулами с частотой $3, 13$ Гц, прикладываемыми в момент времени 500 мс, и стимуляцией с частотой $7, 25$ Гц, начинающейся в момент 600 мс. Частотный интервал, соответствующий второму максимуму частотной зависимости довольно широкий, поэтому достаточно трудно выбрать корректное значение частоты стимуляции для эффективного подавления хаотической динамики.

Следует отметить также, что стимуляция с частотой $\omega_{in} = 7$ Гц, начавшаяся при $t = 600$ мс (приводящая к восстановлению турбулентной активности при $A = 10\mu A/^2$), обеспечивает эффективное подавление при удвоении амплитуды стимуляции (рис. 6).Однако утроение амплитуды не дает положительного результата. Следовательно, зависимость эффективности подавления спирально-волновой активности от амплитуды нелинейна.

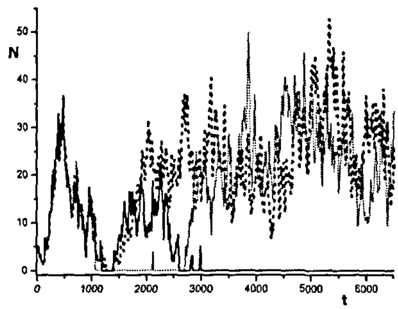

Рис. 6 *Число фазовых сингулярностей как функция времени во время бифазной стимуляции с $\omega_{in} = 7$ Гц и амплитудами $A = 10\mu A/^2$ (жирная линия), $A = 20\mu A/^2$ (тонкая линия) и $A = 30\mu A/^2$ (пунктирная линия).*

Таким образом из изложенного во второй главе материала можно сделать один крайне важный вывод. Развитый пространственно-временной хаос в среде, описываемой системой (1), *можно подавить слабым почти точечным периодическим воздействием*. Этот вывод имеет принципиальное значение для приложений, когда требуется стабилизировать турбулентную динамику возбудимой среды. Кроме того, наши исследования показали, что эффективность (или, иными словами, скорость) подавления хаоса в системе, можно существенно повысить.

В третьей главе изучается силовое воздействие на все точки среды одновременно, обсуждаются преимущества и недостатки такого выведения среды из хаотического состояния. Рассматриваются дополнительно некоторые любопытные аспекты поведения системы, которые были обнаружены в процессе нашего анализа.

В данной диссертационной работе была проведена целая серия исследований с воздействием на всю среду. Первый вполне естественный вывод, к которому мы пришли, состоит в том, что характер граничных условий качественного влияния на эффективность подавления не оказывает. Поэтому в большинстве случаев мы ограничились периодическими граничными условиями. Воздействие подавалось в среду с развитым пространственно-временным хаосом в виде однократного прямоугольного импульса длительностью 1 мс.

При первых же численных экспериментах нам сразу удалось достичь положительного результата для параметров среды $G_1 = 0.01$, $G_3 = 0.5$ и амплитуды импульса $A = 1.3$.

Вполне очевидно, что эффективность описанного подхода при заданных параметрах среды должна зависеть от амплитуды подаваемого импульса. Действительно, при определенном пороговом значении амплитуды импульса A, турбулентность может полностью восстановиться. Например, для параметров среды $G_1 = 0.01$ и $G_3 = 0.5$ пороговое значение амплитуды $A = 1.29$. То есть при использовании импульса с амплитудой $A = 1.29$ турбулентная спирально-волновая динамика полностью подавляется, а если воздействовать импульсом амплитуды $A = 1.28$, то небольшой участок среды остается в возбужденном состоянии и становится источником спиральных волн, которые постепенно заполняют всю область.

В дополнение к этим исследованиям мы также рассмотрели систему с одним ведущим центром при тех же условиях. В этом случае наблюдались некоторые новые интересные эффекты. В частности оказалось, что даже при больших амплитудах общего внешнего воздействия возрождение хаоса в такой системе вполне возможно. После подачи внешнего воздействия в каждый элемент среды фронты кольцевых волн от ведущего центра начинают распадаться на рефрактерных участках, и постепенно спирально-волновая турбулентность заполняет всю среду целиком. Происходит это при достаточно больших частотах волн, исходящих от ведущего центра.

Еще одно интересное наблюдение было сделано, когда мы еще более увеличили время рефрактерности. Оказалось, что в среде с длительным периодом рефрактерности турбулентная динамика исчезает сама собой еще до подачи общего воздействия. Это обстоятельство дает ключ к пониманию многих процессов, происходящих в реальных возбудимых средах.

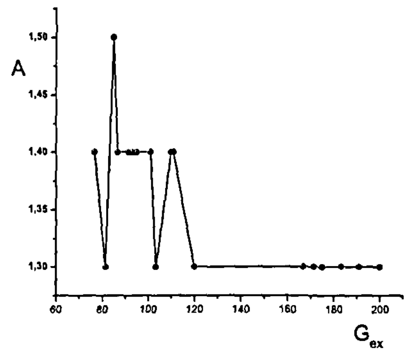

Рис. 7 *Зависимость амплитуды импульса от параметра* G_{ex}

Как уже упоминалось ранее, управляющие параметры G_1 и G_3 системы (1) – (3) обратно пропорциональны периодам абсолютной и относительной рефрактерности соответственно. Поэтому весьма любопытно изучить как порог возбудимости среды зависит от этих параметров. Для этих целей мы ввели новый совокупный параметр $G_{ex} = \frac{1}{G_1} + \frac{10}{G_3}$, и для каждого значения этого параметра было найдено значение пороговой амплитуды общего внешнего воздействия, при которой происходило полное подавление хаотической динамики в среде (рис. 7).

Хорошо видно, что максимальная амплитуда использовавшегося импульса равна 1.5, т.е. она по крайней мере в 4 раза меньше амплитуды точечного воздействия (см. Главу 2). Тем не менее, как уже упоминалось выше, применение этой методики в эксперименте может оказаться весьма затруднительным.

Таким образом, с точки зрения эффективности, метод общего одновременного силового воздействия на каждый элемент среды в целом можно считать предпочтительным с точки зрения эффективности. При правильно подобранной амплитуде всегда удается избавиться от турбулентности. Однако необходимо помнить, что если в системе еще дополнительно имеется точечный источник возбуждения, как, например, это имеет место для сердечной ткани, он может стать причиной достаточно быстрого возрождения пространственно-временной хаотической динамики.

В четвертой главе рассматривается среда с несколькими неподвижными и движущимися ведущими центрами, обсуждаются преимущества и недостатки этого подхода, проводятся аналогии с результатами, полученными в предыдущих главах, производится оптимизация параметров внешнего воздействия, что позволяет обеспечить выведение из хаоса при любых начальных условиях.

Представим ситуацию, когда ведущий центр окружен несколькими спиралями таким образом, что пространство вокруг него занято волновыми фронтами. В этом случае пейсмекер будет полностью подавлен хаотичной средой, и динамика системы будет развиваться таким образом, как будто внешнее воздействие на нее практически не оказывается.

Для решения описанной проблемы, в диссертационной работе предложено два в принципе независимых направления дальнейших исследований:

- увеличение числа ведущих центров;
- переход от неподвижных ведущих центров к движущимся.

Самый простой способ — первый, т.е. увеличение числа областей, к которым подводится внешнее возбуждение. Поэтому мы также изучали поведение системы с несколькими (от 2 до 8) внешними источниками возбуждения.

Из проведенных исследований мы можем сделать довольно любопытный вывод. В ряде случаев увеличение числа пейсмекеров может ускорить подавление турбулентной динамики. Однако так происходит далеко не всегда. Более того, иногда получалось, что увеличение числа ведущих центров давало обратный эффект, то есть время подавление увеличивалось. Связано это, по-видимому, с возникновением конкуренции между пейсмекерами.

Следующий этап работы был связан с анализом более общего случая, когда пейсмекеры не являются стационарными областями в среде, а движутся там с некоторой скоростью.

Система оказалась крайне чувствительной как к величине ω_{rot}, так и числу ведущих центров и их расположению в области среды. В качестве закона движения для ведущих центров мы взяли проекцию синуса на горизонтальную либо вертикальную ось $\xi = \xi_0 \sin(\omega_{rot} t)$, то есть периодическое движение с амплитудой ξ_0 и частотой ω_{rot}. Но даже в этом случае мы столкнулись с очень сложным поведением. Система оказалась крайне чувствительной как к величине ω_{rot}, так и числу ведущих центров и их расположению в области среды. В целом наши исследования показали, что зависимость эффективности подавления хаоса в среде от расположения и скорости движения ведущих центров существенно нелинейна.

После всех проведенных расчетов было решено ограничиться двумя ведущими центрами, расположенными на вертикальной прямой, проходящей через центр области и медленно осциллирующими относительно нее по горизонтали. Частота и амплитуда колебаний ведущих центров была фиксированной: $\xi_0 = 10$, $\omega_{rot} = 2.5 \cdot 10^{-4}$. Иными словами, пейсмекер оказывался локализованным в малой области среды. Тем не менее такой модификации пейсмекера было вполне достаточно, чтобы в системе произошли заметные изменения по сравнению со случаем неподвижных ведущих центров.

Глобальная задача, которая ставилась на данном этапе, состояла в следующем. Необходимо было найти такие параметры для пейсмекера, чтобы остаться в рамках концепции *слабого почти точечного* внешнего воздействия, но при этом полностью гарантировать подавление хаотической динамики в среде независимо от того, в каком состоянии находилась система в начальный момент времени (и в особенности область, окружающая ведущий центр). Основные характеристики воздействия уже фиксированы, однако, остался еще один параметр, который мы обошли стороной – отношение длительности положительной полуволны к отрицательной τ. Было обнаружено, что с точки зрения эффективности целесообразно брать $\tau = 0.18$. В дальнейшем мы везде будем пользоваться именно этим значением τ.

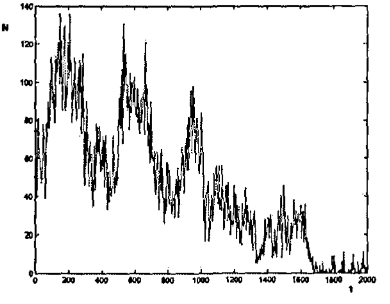

Рис. 8 *Число фазовых сингулярностей в системе (1) с движущимися внешними пейсмекерами как функция времени.* $G_1 = 0.01$, $G_3 = 0.5$, $\omega_{in} = 0.65$, $\tau = 0.18$.

При всех указанных выше параметрах внешнего импульса нам удалось решить задачу успешного подавления *при всех использовавшихся начальных условиях.* В качестве примера приведем здесь один из полученных графиков динамики фазовых сингулярностей (рис. 8).

В пятой главе рассматриваются и обсуждаются возможные механизмы подавления спиральных волн в исследуемой среде.

В целом можно сделать следующие выводы. Всего механизмов подавления спиралей в системе два: вытеснение на периферию (для нулевых граничных условий) и взаимное уничтожение фазовых сингулярностей с противоположными хиральностями. Соответственно, для случая периодических границ остается один механизм. При этом ключом к успешному подавлению спиральных волн является именно неустойчивость. Связано это, видимо, с тем, что неустойчивость создает благоприятные условия для образования пар сингулярностей с противоположными хиральностями. Как известно, ядра волн с противоположными хиральностями при наличии дрейфа могут сталкиваться и взаимно уничтожаться. Эти общие наблюдения также представляют исследовательский интерес, хотя, безусловно, нуждаются в математической формализации. Но этот аспект следует рассматривать как продолжение данного диссертационного исследования.

В заключении обсуждаются возможные приложения полученных в работе результатов, а также выносимые на защиту положения.

1. На базе модели ФицХью-Нагумо показано, что стабилизация хаотической динамики внешним точечным воздействием вполне осуществима. Предложенный подход позволяет полностью вытеснить все спирали и восстановить регулярное поведение системы.

2. Разработанный метод стабилизации также опробован на примере модели Фентона-Кармы, продемонстрирована его эффективность.

3. Выявлены недостатки такой стабилизации и показано, что для получения успешного результата предпочтительно использование движущегося пейсмекера (пейсмекеров).

4. Продемонстрировано, что спирально-волновая турбулентность эффективно подавляется силовым воздействием, приложенным ко всей области среды, причем эффективность нелинейно связана с амплитудой этого воздействия.

5. Обоснована возможность использования предложенной методики подавления спирально-волновой динамики в различных областях физики сложных систем.

Список публикаций по теме работы

1. А.Ю.Лоскутов, Р.В.Черемин, С.А. Высоцкий. *Стабилизация турбулентной динамики возбудимых сред внешним точечным воздействием.*— ДАН, том 404, N 4, с. 1-4, (2005).

2. А.Ю.Лоскутов, С.А.Высоцкий. *Новый подход к проблеме дефибрилляции: подавление спирально-волновой активности сердечной ткани.*— Письма в ЖЭТФ, том 84, вып. 9, с. 616–621, (2006).

3. E.Zhuchkova, B.Radnayev, S.Vysotsky, A.Loskutov. *Suppression of turbulent dynamics in models of cardiac tissue by weak local excitations.*— In: Understanding Complex Systems, ed. S.K. Dana, P.K. Roy, J. Kurths, Springer Berlin/Heidelberg, pp. 89–105, (2009).

4. S.A.Vysotskiy, R.V.Cheremin, A.Loskutov. *Suppression of spatio-temporal chaos in simple models of re-entrant fibrillations.*— J. of Physics: Conference Series, v. 23, pp. 202-209, (2005).

5. S.A.Vysotsky, R.V.Cheremin and A.Loskutov. Suppression of spiral–wave turbulence by point weak excitations.— *Proc. of 2005 Int. Conf. «Physics and Control»*, August 24–26, Saint Petersburg, Russia.— IEEE, p.236–239, (2005).

6. S.A.Vysotskiy, R.V.Cheremin, A.Loskutov. *Suppression of spiral-wave turbulence by point weak excitations.*— IEEE XPlore, ISBN: 0-7803-9235-3, pp. 236–239, (2005).

7. A.Loskutov, S.Vysotskiy, S.Boccaletti. *New Methods of Suppression of the Spiral Wave Activity in Cardiac Tissue.*— Proceedings of 17th International Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, pp. 153-156, (2009).

8. S.A.Vysotsky, R.V.Cheremin and A.Loskutov. Suppression of spatio-temporal chaos in simple models of re-entrant fibrillations.— *Proc. of Int. Conf. on Control and Synchronization of Dynamical Systems*, October 4–7, 2005, Leon GTo., Mexico, p.20–21.

9. S.Vysotskyi, R.Cheremin and A.Loskutov. Stabilization of fatal cardiac rhythms.— *Book of abstracts of XXV Dynamics Days Europe 2005*, Berlin, Germany, July 25–28, 2005, p.229.

10. A.Loskutov and S.Vysotsky. *A new strategy of the defibrillation: Suppression of the spiral wave turbulence by moving pacemaker(s).*— Abstract Collection of the 3rd International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon 2007), p. 317, (2007).

11. A.Loskutov and S.Vysotsky. *New Methods of Suppression of the Spiral Wave Activity in Cardiac Tissue.*— Indo-Russian workshop «Complete networks and applications». Kolkata, India, December 1–2, 2009.

12. С.А.Высоцкий, Р.В.Черемин, А.Ю.Лоскутов. *Исследование динамики пространственно-распределенных систем. Приложения к кардиологии.* Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых по фундаментальным наукам «Ломоносов-2005», Россия, Москва, (2005).

Подписано в печать: 12.05.10
Объем: 1,5 усл.печ.л.
Тираж:100 экз. Заказ № 256
Отпечатано в типографии «Реглет»
119526, г.Москва, пр-т Вернадского, 39
(495) 363-78-90; www.reglet.ru