

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИФФУЗИОННО ИНДУЦИРОВАННЫХ
ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2004 г. Н. А. Ковалева, А. Ю. Лоскутов

Представлено академиком А.Р. Хохловым 30.12.2003 г.

Поступило 14.01.2004 г.

Показано, что диффузионно индуцированный хаос в распределенной системе можно подавить посредством параметрического воздействия без обратной связи.

Возможность стабилизации хаотических колебаний впервые, по-видимому, была описана в работах [1, 2], где рассмотрен класс обыкновенных дифференциальных уравнений с неполиномиальной правой частью. Впоследствии метод подавления хаоса (без обратной связи) для систем определенного класса был аналитически обоснован в [3, 4] (см. также [5] и приводимые там ссылки). Широкое распространение данное направление получило после публикации [6], где было показано, что при помощи достаточно слабых параметрических возмущений с обратной связью можно подавить хаос и стабилизировать практически любой седловой предельный цикл, вложенный в хаотический аттрактор. Большинство исследований в этой области касается стабилизации динамики сосредоточенных систем. В то же время работы, где изучается возможность подавления пространственно-временного хаоса, не столь многочисленны, хотя на этом пути можно найти подходы к очень важным приложениям (см. [7–9] и цитируемую там литературу).

В настоящей работе с целью выявления параметрической стабилизации хаотического поведения исследована распределенная система типа реакция–диффузия [10–12]:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= D \partial_{zz} u + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(A(z)u - u^2 + \frac{q(z)B(z)(pA(z)v - uv)}{pA(z) + u} \right), \quad (1) \\ \partial_t v &= D \partial_{zz} v + A(z)u - B(z)v. \end{aligned}$$

Эта система известна как Орегонатор с диффузией, который описывает одну из разновидностей реакции Белоусова–Жаботинского в реакторе Куэтта. Здесь $A = [\text{BrO}_3^-]$, $B = [\text{organicspecies}]$, $u = [\text{HBrO}_2]$, $v = [\text{Ce}^{4+}]$, q – число ионов Br^- , приходящихся на один ион Ce^{4+} , A, B – исходные реагенты, p – продукт реакции, и пространственная координата z считается нормированной на 1.

Модель (1) имеет только две независимые переменные и поэтому не способна обладать хаотическими свойствами. Однако наличие диффузии приводит к появлению неустойчивости и, как следствие, развитию хаотической динамики. Такое явление называется диффузионно-индуцированным хаосом.

Для реактора Куэтта допустимо предположение [13], что пространственные профили концентраций A и B определяются только диффузией и, следовательно, параметры изменяются линейно в зависимости от аксиальной координаты z . Значение q зависит от отношения органических веществ к бромсодержащим и поэтому также имеет линейную зависимость от пространственной координаты:

$$\begin{aligned} A(z) &= A(0) \left(1 - \frac{5}{6}z \right), \quad B(z) = \frac{B(1)}{6} (1 + 5z), \quad (2) \\ q(z) &= 1, 5 - 0, 6z. \end{aligned}$$

Стехиометрические факторы ε и p являются постоянными, поскольку зависят только от скоростей реакций: $\varepsilon = 2,2 \cdot 10^{-2}$, $p = 3,5 \cdot 10^{-3}$ [13]. Эффективный коэффициент диффузии D предполагается одним и тем же для двух переменных u и v : $D = 3,75 \cdot 10^{-4}$. Условия на границе реактора имеют вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=1} = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=1} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, Орегонатор в реакторе Куэтта можно описать краевой задачей (1) с граничными условиями (3).

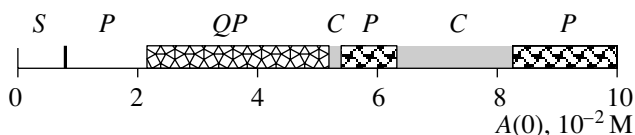


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1)–(3) при $B(1) = 0,85$. S – стационарная точка, P – периодическое поведение (предельный цикл), QP – квазипериодическое движение, C – хаотическое поведение.

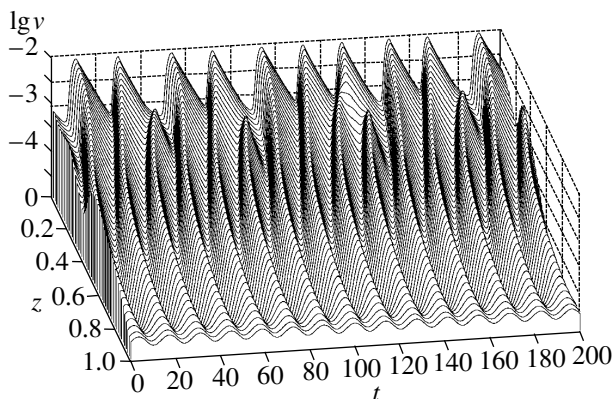


Рис. 2. Динамическая картина колебаний в системе (1)–(3) при $A(0) = 7.0 \cdot 10^{-2}$ (хаос).

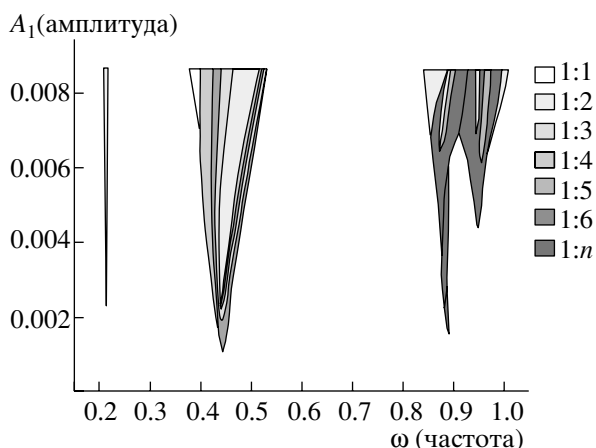


Рис. 3. Области стабилизированного поведения системы (1)–(4) в параметрическом пространстве (A_1, ω) .

Анализ системы (1)–(3) показывает, что в зависимости от величины управляющих параметров ее решение $v(z, t)$, $u(z, t)$ может быть достаточно сложным (квазипериодическим и хаотическим) только в пространственной области $0 < z < 0.5$. В то же время в интервале $0.5 < z < 1$ при любых допустимых значениях параметров и заданной диффузии система либо стационарна, либо проявляет только периодическую динамику. Это объясняется тем, что возбуждаемые при $z = 0$ автоколеба-

ния с распространением вдоль реактора быстро затухают.

В качестве бифуркационного параметра можно выбрать величину $A(0)$ (см. (2)) при фиксированном $B(1)$. Характер поведения системы в зависимости от значений $A(0)$ представлен на рис. 1. Если $A(0) < 0.8 \cdot 10^{-2}$, то система стремится к стационарному состоянию. Для $A(0) \in (0.8 \cdot 10^{-2}; 2.3 \cdot 10^{-2})$ в области $0 < z < 0.5$ решение имеет вид периодических колебаний по времени. При $A(0) > 2.3 \cdot 10^{-2}$ колебания из начала реактора распространяются вдоль реактора так, что при z , близких к 1, решения являются также периодическими. При увеличении $A(0)$ режим движения при малых z усложняется (рис. 2) и становится более резким и неупорядоченным.

При идентификации режимов поведения системы использовались широко известные методы, такие, как показатели Ляпунова, спектр мощности и отображение Пуанкаре. С их помощью были выделены две области хаотического поведения: $A_c = (5.2 \cdot 10^{-2}; 5.3 \cdot 10^{-2})$ и $A_c = (6.5 \cdot 10^{-2}; 8.3 \cdot 10^{-2})$ (рис. 1).

Для изучения возможности стабилизации хаотических колебаний был использован один из самых простых параметрических методов воздействия без обратной связи – гармоническое возмущение параметра $A(0)$ в области хаотичности:

$$A(0) = A_0 + A_1 \sin(\omega t), \quad A_0 = \frac{A_a + A_b}{2}, \quad (4)$$

$$A_1 < \frac{A_b - A_a}{2},$$

где A_1 и ω – соответственно амплитуда и частота возмущения, A_a и A_b – значения параметра $A(0)$, отвечающие границам области A_c , где наблюдается хаотический режим. Легко видеть, что при таком изменении при любых A_1 внешнее возмущение не выходит за пределы существования хаоса в системе (1)–(3).

В результате тщательного численного анализа найдены области, где происходит подавление хаотического режима и выход системы на регулярный режим. Они подобны узким клиньям, каждый из которых обладает достаточно сложной внутренней структурой. Эта структура имеет вид вложенных друг в друга пиков синхронизации различной кратности (рис. 3). При некоторых значениях амплитуд и частот возмущения наблюдается полная синхронизация системы и внешне возмущения. На рисунке данная область не окрашена. В этом случае фазовый портрет представляет собой замкнутую кривую, а картина колебаний для фиксированной пространственной переменной $v(z_{\text{fix}}, t)$ является периодической. Более темным цветом обозначены области, отвеча-

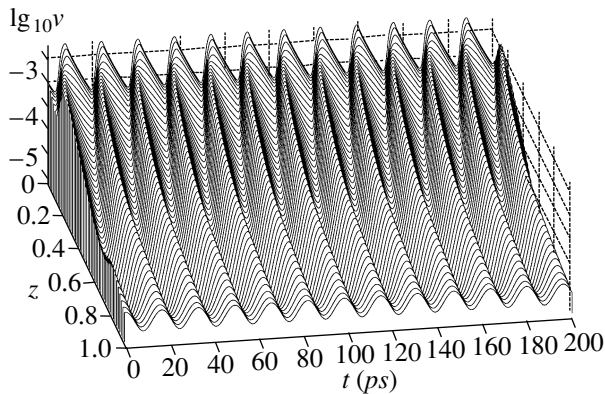


Рис. 4. Пространственно-временная динамика системы (1)–(3) при внешнем воздействии (4), $A_1 = 0.081$, $\omega = 0.3855$ (стабилизированное поведение).

ющие циклам периода два, четыре и т.д. Черным цветом отмечены области параметров, соответствующие сложному периодическому поведению. Пространственно-временная картина колебаний для $\omega = 0.3855$ и $A_0 = 0.0081$ (что соответствует не окрашенной области на рис. 3) представлена на рис. 4.

Обобщение данных результатов может оказаться чрезвычайно важным в приложениях, когда требуется мягкое выведение систем из состояния пространственно-временного хаоса, например, в кардиологии, где его развитие оказывается фатальным для организма. Современные методы стабилизации сильно хаотических сердечных ритмов (фибрилляции) являются очень жесткими: подача короткого электрического импульса большого напряжения и тока. Однако, как показывают предварительные исследования, по-видимому, можно слабым

периодическим воздействием осуществить стабилизацию и восстановить ритм. Данный эффект возможен также для систем самого различного происхождения [14, 15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю. // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. 1985. Т. 26. № 3. С. 40–44.
2. Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю. // ДАН. 1987. Т. 293. № 6. С. 1346–1348.
3. Лоскутов А.Ю., Шишмарев А.И. // УМН. 1993. Т. 48. № 1. С. 169–170.
4. Loskutov A., Shishmarev A.I. // Chaos. 1994. V. 4. № 2. P. 351–355.
5. Loskutov A. // comput. Math. and Modeling. 2001. V. 12. № 4. P. 314–352.
6. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1196–1199.
7. Chen G., Dong X. // Intern. J. Bifurct. and Chaos. 1993. V. 3. № 6. P. 1363–1409.
8. Ott E., Spano M.L. // Physics Today. 1995. V. 48. № 5. P. 34–40.
9. Boccalett S., Grebogi C., Lai Y.-C. et al. // Phys. Rept. 2000. V. 329. P. 103–197.
10. Field R.J., Körös E., Noyes R.M. // J. Amer. Chem. Soc. 1972. V. 94. P. 8649–8665.
11. Колебания и бегущие волны в химических системах / Под ред. Р. Филда, М. Бургера. М.: Мир, 1988.
12. Loskutov A. In: Mathematical Methods of Contemporary Chemistry. N.Y.: Gordon and Breach, 1996. P. 181–265.
13. Tam W.Y., Swinney H.L. // Phys. Rev. A. 1987. V. 36. P. 1374–1381.
14. Kim M., Bertran M., Pollmann M. et al. // Science. 2001. V. 292. P. 1357–1360.
15. Alonso S., Sagués F., Mikhailov A.S. // Science. 2003. V. 299. P. 1722–1725.